Вычислить неопределенный интеграл.

Изображение

Сделаем замену переменных. $\sqrt[3]{x} = t$, тогда, $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{x}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^3 * 3t^2 dt}{1-t} = 3\int \frac{t^5 dt}{1-t} = -3\int \frac{t^5 dt}{t-1}$$

Получили рациональную дробь, у которой степень числителя больше степени знаменателя. Разложим эту дробь на многочлен и правильную дробь

$$
\begin{array}{l|l}
t^5 & t-1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{t^5 - t^4} & t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 \\
\quad t^4 & \\
\quad -\ \underline{t^4 - t^3} & \\
\quad\quad t^3 & \\
\quad\quad -\ \underline{t^3 - t^2} & \\
\quad\quad\quad t^2 & \\
\quad\quad\quad -\ \underline{t^2 - t} & \\
\quad\quad\quad\quad t & \\
\quad\quad\quad\quad -\ \underline{t - 1} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 1 &
\end{array}
$$

Следовательно, $\frac{t^5}{t-1} = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}$

$$-3\int \frac{t^5 dt}{t-1} = -3\int (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})dt = -3\left(\int t^4 dt + \int t^3 dt + \int t^2 dt + \int t dt + \int dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) =$$

$$= -3\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C = -3\left(\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{4} + \frac{x}{3} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} + \sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right|\right) + C$$